825. V. Šmulian: Banach 空間ノ principle of inclusion ニ就テ, II

樋口 順四郎（阪大）

III. 前号デハ共軛空間 $\bar{E}$ ハ全然考ヘニ入レナカッタ。

以下デハ空間 $\bar{E}$ ヲ考ヘル。 $G \subset \bar{E}$ ヲ任意ノ集合トス

ルトキ，G ト G ノ element ノスベテノ transfinite sequence ノ transfinite limit[9] ノ和集合ヲ G_1 ト書キ，G_1 ヲ含ム最小ノ convex closed set ヲ G_1^c デ表ハス．$\xi < \xi_0$ ニ対シテハスデニ G_ξ，G_ξ^c ガ定義サレテヰル時 G_{ξ_0} ヲ次ノ様ニ定メル。

a) $\xi_0 - 1$ ガ存在スルナラ

$$G_{\xi_0} = \left(G^c_{\xi_0 - 1}\right)_1,$$

b) $\xi_0 - 1$ ガ存在シナケレバ

$$G_{\xi_0} = \sum_{\xi < \xi_0} G_\xi .$$

$G^c_{\xi_0}$ ハ G_{ξ_0} ヲ含ム最小ノ convex closed set ト定義スル。コノトキ適當ナ ϑ ガ定マッテ G^c_ϑ ハ convex デ transfinitely closed ニナル事ハ明デアル。

$\boxed{\text{Lemma 5}}$ $f_\xi(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$ トナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハスベテノ f_ξ ヲ含ム任意ノ convex transfinitely closed set ガ f_0 ヲ含ムコトデアル。

証： 必要條件デアルコトハ明デアル。充分ナコトヲ

---

9) $f_0(x)$ ガ $\{f_\xi(x)\}_{\xi<\vartheta}$ ノ transf. limit デアルトキ

$f_\xi(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$ ト書クコトニスル．コレハ任意ノ $x \in E$ ニツイテ $\underline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x) \leq f_0(x) \leq \overline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f_\xi(x)$ ガ成立スルコト。

証明スル．今 $\overline{\lim}\, f_\xi(x') < f_0(x')$ デアレバ $\xi \geq \xi_0$ ト充分ニ小サナ ε_0 ニ對シテ

$$f(x') \leq f_0(x') - \varepsilon_0, \quad f = f_\xi \quad (8)$$

ガ成立スル．G ヲ $\xi \geq \xi_0$ デアル f_ξ ノ全体トシ，上述ノ convex transfinitely closed set G^c_ϑ ヲ作ル．(8) ハスベテノ $f \in G^c_\vartheta$ デ成立スル．シカルニ $f_0 \in G^c_\vartheta$ デアルカラ $f_0(x') \leq f_0(x') - \varepsilon_0$，之レハ矛盾デアル．

$\boxed{\text{Lemma 6}}$ $\{f_n\}$ ガ f_0 ニ弱收斂スルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $\{f_n\}$ ノ殆ンドスベテヲ含ム functional トシテ weakly closed ナ convex set ガ f_0 ヲモ含ムコトデアル．

証：Lemma 5 ト同様ニデキル．

$\boxed{\text{Lemma 7}}$ linear subspace $F \subset \overline{E}$ ノ unit sphere ガ ϑ-closed[10] ナルタメニハ有界ナ convex; transfinitely closed set ノ任意ノ減少系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots, \quad K_\xi \cdot F \neq \Lambda \quad (1 \leq \xi < \vartheta)$$

ガ F ニ屬スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル．

証：Lemma 5 カラ容易ニ証明デキル．

linear subspace $F \subset \overline{E}$ ガ regularly closed ナタメニハ，F ノ unit sphere ガ transfinitely

---

10) $\mathfrak{M}$ ガ ϑ-closed トハ $f_\xi(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$，$f_\xi \in \mathfrak{M}$ ナラ $f_0 \in \mathfrak{M}$ トナルコト．

closedデアルコトガ必要且ツ充分デアルカラ，Lemma 7カラ次ノ定理ヲ得ル。

$\boxed{\text{定理6}}$ Eノ線状部分空間Fガ regularly closedナタメニハ有界ナ convex, transf. closed set ノ任意ノ減少系列。

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots,$$

$$K_\xi \cdot F \neq \Lambda \quad (1 \leqq \xi < \vartheta,\ \vartheta \text{ ハ任意}) \cdots (9)$$

ガFニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

定理6ヲ用ヒルト，定理5ト同様ナ次ノ定理ガ証明サレル。

$\boxed{\text{定理7}}$ Eノ線状部分空間Fノ unit sphere ガ w-closed ト仮定スル．Fガ regularly closed ナタメニハ，Eノ Unit sphere $\|f\| \leqq 1$ 内ノ convex, transfinitely closed set ノ任意ノ減少系列(9)（但シ $K_\xi \cdot F$ ハ $\|f\|=1$ ノ表面ニアルトスル）ガFニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

$\boxed{\text{注意}}$ Fノ Unit sphere ノ表面上ノ convex, w-closed set ガ separable ナラ定理ノ條件ヲ満足スル。依ツテ

$\boxed{\text{系}}$ Fノ unit sphere ノ表面上ノ convex closed set ガ separable ナラ，Fガ regularly closed ナタメニハ，ソノ unit sphere ガ w-closed ナコトガ必要且ツ充分デアル。

コノ定理カラ

$\boxed{\text{定理 8}}$ F ガ $\bar{E}$ ノ separable subspace ナラバ, F ガ regularly closed ナタメニハ有界ナ convex transfinitely closed set ノ denumerable sequence.

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots\cdots \quad K_n \cdot F \neq 0$$

ガ F ニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

IV. $\boxed{\text{Lemma 8}}$ H ヲ $\bar{E}$ ノ任意ノ separable subspace トスルト, separable subspace $G \subset E$ ヲ適当ニトレバ $H \subset \bar{G}$ トナル。

証: H デ dense ナ $\{f_n\}$ ヲ取ル. f_n ニ対応シテ $\{x_n^{(k)}\}_{k=1,2,\cdots}$ ヲ次ノ如クニヤメル。

$$\|x_n^{(k)}\|=1, \quad \lim_{k\to\infty} f_n(x_n^{(k)})=\|f_n\|.$$

$\{x_n^{(k)}\}_{n,k=1,2,\cdots\cdots}$ ヲ含ム最小ノ linear closed set ヲ G トスル。 G ハ E ノ separable subspace デ, H ニ属スル f ハ勿論 G デモ定義サレテヰル。identically zero デハナク $\{x_n^{(k)}\}$ ト orthogonal ナ linear functional ヲ f_0 トスル ($f_0 \in \bar{G}$)。f_0 ヲ norm ヲ上ゲヌ様ニ E ヘ拡張シタモノヲ F_0 トスル $\|F_0\|_E = \|f_0\|_G \neq 0$. 明ラカニ $F_0 \bar{\in} H$。

$\boxed{\text{Lemma 9}}$ $\mathfrak{M} \subset \bar{E}$ ヲ separable ナ有界集合トスル. $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ $(f_n \in \mathfrak{M})$ ニハ $f_n(x) \xrightarrow{\omega} f(x)$ トナル f. ガ対応シテヰル。スベテノ $\{f_n\}$ ニ対シテ出来ル f ノ集合 H ガ separable ナラ $\mathfrak{M}$ ハ (functional ノ

弱収斂デ) weakly compact デアル。

証: $\mathfrak{M}+H$ ヲ含ム最小ノ closed linear set ヲ E_1 トスル。E_1 ハ $\overline{E}$ ノ separable subspace デアル。Lemma 9 ニヨリ separable subspace $G \subset E$ ヲトッテ $E_1 \subset \overline{G}$ ナラシメル。G デ dense ナ elements ヲ $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ トスル。$f \in E_1$ デ $f(x_n) = 0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ナラ $f=0$ デアルコトハ G ノ作リ方カラ明デアル。

$\{f_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ系列トセヨ。$\{f_n\}$ ハ $\lim_n f_n(x_\nu)$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ が存在スルモノト假定シテモヨイ(サウデナケレバ部分列ヲトル)。今スベテノ $x \in E$ デ $\lim_n f_n(x)$ が存在スルコトヲ証明シヨウ。モシ $x' \in E$ デ $\lim_n f_n(x')$ が存在シナイナラ二ツノ部分列 $\{f'_{n_i}\}$, $\{f''_{n_i}\}$ ガアッテ x' デ各々異ナル極限ヲモツ。一方假定カラ $f', f'' \in E_1$ が存在シテ

$$\underline{\lim_{i\to\infty}} f'_{n_i}(x) \leq f'(x) \leq \overline{\lim_{i\to\infty}} f'_{n_i}(x),$$

$$\underline{\lim_{i\to\infty}} f''_{n_i}(x) \leq f''(x) \leq \overline{\lim_{i\to\infty}} f''_{n_i}(x)$$

が任意ノ $x \in E$ デ成立スル。シカモ x_ν $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ デハ $\lim f'_{n_i}(x_\nu) = \lim f''_{n_i}(x_\nu)$。從ッテ $f'-f''=f$ ト書ケバ $f \in E_1$, $f(x_\nu)=0$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$. 故ニ identically ニ $f=0$. 之ハ $f(x') \neq 0$ ニ矛盾スル。即チ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ハ存在スル。コレハ $\mathfrak{M}$ が weakly compact ナコトニ外ナラヌ。

$\boxed{\text{系理 9}}$ $\mathfrak{M}$ ヲ $\bar{E}$ ノ（functional ノ弱収斂デ）weakly closed ナ separable set トスル。$\mathfrak{M}$ ガ（functioned ノ弱収斂デ）weakly compact ナタメニハ $K_n \cdot \mathfrak{M}$ ナ Λ デアル weakly closed convex set ノ任意ノ denumerable sequence

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots\cdots$$

ニ共通ナ $\mathfrak{M}$ ノ点ガ存在スルコトガ必要且ツ充分デアル。

証. Lemma 5, 9 カラ容易ニワカル。

次ニ Lemma 9 ヨリ直チニ分ル事実ヲ列挙シヨウ。

1°. $f_n \in \bar{E}$, $\|f_n\| \leq 1$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ與ヘラレタ時，モシ

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq f(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

for all $x \in E$

トナル $f \in \bar{E}$ ノ集合ガ separable ナラ $\{f_n\}$ ハ weakly compact デアル（functional ノ弱収斂ノ意味デ）。

2°. $x_0 \in E$ $\|x_0\|=1$ ガ與ヘラレタトスル。x_0 ニ於ケル unit sphere $\|x\| \leq 1$ ノ Stützhyperebene ヲ $f(x)=1$ トスルモシ $\{f\} \in \bar{E}$ ガ separable デ $f_n(x_0) \to 1$（但シ $\|f_n\| \leq 1$）ナラ $\{f_n\}$ ハ weakly compact デアル。

$\mathfrak{M} < E$ ノ任意ノ sequence $\{x_n\}$ カラ適當ニ部分

列 $\{x_{n_i}\}$ ヲ選ビ出セバ，スベテノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ $\lim f(x_{n_i})$ が存在スルナラ，$\mathfrak{M}$ ハ conditionally weakly compact デアルト云フ。

$\{x_n\}$ ノ弱收斂ハ $F_n(f) \equiv f(x_n)$ ノ弱收斂ト同ジコトデアルカラ Lemma 9 ト，上ノ 1°, 2° カラ

3°. $\mathfrak{M} \subset E$ ヲ有界，separable set トスル。任意ノ系列 $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ $(x_n \in \mathfrak{M})$ ニ次ノ様ナ $F \in \overline{\overline{E}}$ ヲ對應サセル。

$$\underline{\lim}\, f(x_n) \le F(f) \le \overline{\lim}\, f(x_n)$$
$$\text{for all } f \in \overline{E}$$

コノ $F(f)$ ノ全体ヲ H トスル。モシ H が separable ナラバ $\mathfrak{M}$ ハ conditionally weakly compact デアル。

4°. $x_n \in E$，$\|x_n\| \le 1$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ が與ヘラレタトスル。

モシ

$$\underline{\lim}\, f(x_n) \le F(f) \le \overline{\lim}\, f(x_n)$$
$$\text{for all } f \in \overline{E}$$

トナル $F \in \overline{\overline{E}}$ ノ全体が separable ナラ $\{x_n\}$ ハ cond. weakly compact デアル。

5°. $f_0 \in \overline{E}$，$\|f_0\| = 1$ が與ヘラレタトスル。

$\|f\| \le 1$ ノ f_0 ニ於ケル Stütz hyperebene $F(f) = 1$ が separable set $\{F\} \subset \overline{\overline{E}}$ ヲナシ，$f_0(x_n) \longrightarrow 1$ $(\|x_n\| \le 1)$ ナラバ $\{x_n\}$ ハ cond. weakly compact デアル。